Ejercicios de Análisis Matemático
Números y desigualdades

1. Sea x un número real. Estudia si cada una de las desigualdades
$$x^2 < x \quad \text{y} \quad x^3 < x^2$$
es consecuencia de la otra.

2. Calcula para qué valores de x se verifican las desigualdades siguientes.

i)	$\dfrac{2x-3}{x+2} < \dfrac{1}{3}$	ii)	$\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{1-x} > 0$
iii)	$x^2 - 5x + 9 > x$	iv)	$x^3(x-2)(x+3)^2 < 0$
v)	$x^2 - (a+b)x + ab < 0$	vi)	$3(x-a)a^2 < x^3 - a^3 < 3(x-a)x^2$

3. Prueba que cualesquiera sean los números reales positivos $a > 0$ y $b > 0$ se verifica que
$$\frac{a}{2(a+b)\sqrt{b}} < \frac{1}{\sqrt{b}} - \frac{1}{\sqrt{a+b}}$$

4. Calcula para qué valores de x se verifican las siguientes desigualdades.

i)	$\lvert x-5\rvert < \lvert x+1\rvert$	ii)	$\lvert x-1\rvert\lvert x+2\rvert = 3$
iii)	$\lvert x^2-x\rvert > 1$	iv)	$\lvert x-y+z\rvert = \lvert x\rvert - \lvert z-y\rvert$
v)	$\lvert x-1\rvert + \lvert x+1\rvert < 1$	vi)	$\lvert x+y+z\rvert = \lvert x+y\rvert + \lvert z\rvert$
vii)	$\lvert x\rvert - \lvert y\rvert = \lvert x-y\rvert$	viii)	$\lvert x+1\rvert < \lvert x+3\rvert$

5. Prueba cada una de las siguientes desigualdades y estudia, en cada caso, cuándo se da la igualdad.

   a) $2xy \leqslant x^2 + y^2$.

   b) $4xy \leqslant (x+y)^2$.

   c) $x^2 + xy + y^2 \geqslant 0$.

   d) $(a^2+a+1)(b^2+b+1)(c^2+c+1) \geqslant 27abc$ donde $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$.

   Sugerencia. Para probar a) considérese $(x-y)^2$. Las demás desigualdades pueden deducirse de a).

6. Sean x e y números distintos de cero. Prueba que las igualdades
$$\frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}, \qquad \sqrt{x^2+y^2} = x + y$$
son falsas.

7. Prueba que $\lvert x\rvert + \lvert y\rvert + \lvert z\rvert \leqslant \lvert x+y-z\rvert + \lvert x-y+z\rvert + \lvert -x+y+z\rvert$.

8. Sean a, b y c números positivos. Prueba que
$$\frac{a+b+c}{abc} \leqslant \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$

9. Justifica las siguientes afirmaciones.

   a) La suma de un número racional y un número irracional es un número irracional.

   b) El producto de un número racional no cero por un número irracional es un número irracional.

   c) La suma y el producto de dos números irracionales puede ser racional o irracional.

   d) Los números $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, $\sqrt{6}-\sqrt{2}-\sqrt{3}$ y $\dfrac{\sqrt{5}+2}{3\sqrt{5}+4}$ son irracionales.

10. Sean a, b números positivos distintos y $n \in \mathbb{N}$. Utiliza la desigualdad de las medias para probar que:

$$ab^n < \left(\frac{a+nb}{n+1}\right)^{n+1}.$$

Deduce que para todo número natural n se verifica que:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \text{ y } \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$$

Los siguientes ejercicios pueden hacerse usando la desigualdad de las medias.

11. Prueba que el cubo es el ortoedro de máximo volumen para una superficie lateral dada y de mínima superficie lateral para un volumen dado.

12. Prueba que el triángulo equilátero es el triángulo que tiene máxima área para un perímetro dado y de mínimo perímetro para un área dada.

    Sugerencia. Si a, b, c son las longitudes de los lados y $p = (a+b+c)/2$ es el semiperímetro, entonces, según la fórmula de Heron de Alejandría, el área, A, viene dada por $A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$.

13. Calcula el rectángulo de mayor área inscrito en la elipse de ecuación $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, donde $a>0$, $b>0$.

14. Calcula el ortoedro de mayor volumen inscrito en el elipsoide de ecuación

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

donde $a>0$, $b>0$, $c>0$.